FORMLER TILL NATIONELLT PROV I MATEMATIK
KURS E

ALGEBRA

Regler

$$\left.\begin{array}{l}(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \\ (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2\end{array}\right\} \quad \text{(kvadreringsregler)}$$

$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2 \qquad \text{(konjugatregeln)}$$

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

$$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$$

$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$$

Andragrads-ekvationer

Ekvationen $x^2 + px + q = 0$ har rötterna

$$x_1 = -\frac{p}{2} + \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} \quad \text{och} \quad x_2 = -\frac{p}{2} - \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

där $x_1 + x_2 = -p$ och $x_1 \cdot x_2 = q$

ARITMETIK

Prefix

T	G	M	k	h	d	c	m	μ	n	p
tera	giga	mega	kilo	hekto	deci	centi	milli	mikro	nano	piko
10^{12}	10^{9}	10^{6}	10^{3}	10^{2}	10^{-1}	10^{-2}	10^{-3}	10^{-6}	10^{-9}	10^{-12}

Potenser

För reella tal x och y och positiva tal a och b gäller

$$a^x a^y = a^{x+y} \qquad \frac{a^x}{a^y} = a^{x-y} \qquad \left(a^x\right)^y = a^{xy}$$

$$a^x b^x = (ab)^x \qquad \frac{a^x}{b^x} = \left(\frac{a}{b}\right)^x \qquad a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$$

$$a^{-x} = \frac{1}{a^x} \qquad a^0 = 1$$

Logaritmer

För positiva tal y gäller:

$$10^x = y \Leftrightarrow x = \lg y \qquad \mathrm{e}^x = y \Leftrightarrow x = \ln y$$

För positiva tal x och y gäller:

$$\lg xy = \lg x + \lg y \qquad \lg\frac{x}{y} = \lg x - \lg y$$

$$\lg x^p = p \cdot \lg x$$

Geometrisk summa

$$a + ak + ak^2 + \ldots + ak^{n-1} = \frac{a(k^n - 1)}{k - 1} \text{ där } k \neq 1$$

DIFFERENTIAL- OCH INTEGRALKALKYL

Derivatans definition

$$f'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

Deriveringsregler

Funktion	Derivata
x^a där a är ett reellt tal	ax^{a-1}
a^x $(a>0)$	$a^x \ln a$
$\ln x$ $(x>0)$	$\frac{1}{x}$
e^x	e^x
e^{kx}	$k\cdot \mathrm{e}^{kx}$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$
$\tan x$	$1+\tan^2 x=\frac{1}{\cos^2 x}$
$f(x)+g(x)$	$f'(x)+g'(x)$
$f(x)\cdot g(x)$	$f(x)\cdot g'(x)+f'(x)\cdot g(x)$
$\frac{f(x)}{g(x)}$ $(g(x)\neq 0)$	$\frac{f'(x)\cdot g(x)-f(x)\cdot g'(x)}{(g(x))^2}$

Kedjeregeln

Om $y=f(z)$ och $z=g(x)$ är två deriverbara funktioner så gäller för den sammansatta funktionen $y=f(g(x))$ att

$$y'=f'(g(x))\cdot g'(x) \text{ eller } \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}z}\cdot\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}$$

Några primitiva funktioner

$f(x)$	$F(x)$ (C är en reell konstant)
k	$kx+C$
x^n $(n\neq -1)$	$\frac{x^{n+1}}{n+1}+C$
$\frac{1}{x}$ $(x\neq 0)$	$\ln\lvert x\rvert+C$
e^x	e^x+C
a^x $(a>0,\ a\neq 1)$	$\frac{a^x}{\ln a}+C$
$\sin x$	$-\cos x+C$
$\cos x$	$\sin x+C$

DIFFERENTIALEKVATIONER

Homogena ekvationer	Av 1:a ordningen: $y' + ay = 0$ Lösningarna kan skrivas $y = Ce^{-ax}$ Av 2:a ordningen: $y'' + ay' + by = 0$ Den karakteristiska ekvationen $r^2 + ar + b = 0$ har rötterna r_1 och r_2 Om r_1 och r_2 är reella tal och $r_1 = r_2$ så kan lösningarna skrivas $y = (C_1 x + C_2)\mathrm{e}^{r_1 x}$ Om r_1 och r_2 är reella tal och $r_1 \neq r_2$ så kan lösningarna skrivas $y = C_1 \mathrm{e}^{r_1 x} + C_2 \mathrm{e}^{r_2 x}$ Om $r_1 = s + \mathrm{i}t$ och $r_2 = s - \mathrm{i}t$ kan lösningarna skrivas $y = \mathrm{e}^{sx}(C_1 \cos tx + C_2 \sin tx)$
Inhomogena ekvationer	Generellt bestäms den allmänna lösningen som $y = y_h + y_p$, där y_p är en partikulärlösning till den inhomogena ekvationen och y_h den allmänna lösningen till motsvarande homogena ekvation. Separabla differentialekvationer: $g(y)y' = f(x)$ Löses enligt $\int g(y)dy = \int f(x)dx$

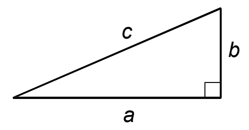
FUNKTIONSLÄRA

Räta linjen	$k = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$	Riktningskoefficient för linje genom punkterna (x_1, y_1) och (x_2, y_2) där $x_1 \neq x_2$
	$y = kx + m$	Linje genom punkten (0, m) med riktningskoefficienten k
	$y - y_1 = k(x - x_1)$	Linje genom punkten (x_1, y_1) med riktningskoefficienten k
	$k_1 \cdot k_2 = -1$	Villkor för vinkelräta linjer
Exponential-funktioner	$y = C \cdot a^x$	C och a är konstanter $a > 0$ och $a \neq 1$
Potensfunktioner	$y = C \cdot x^a$	C och a är konstanter

GEOMETRI

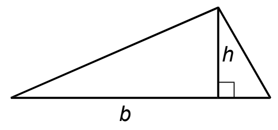
Pythagoras sats

$a^2 + b^2 = c^2$



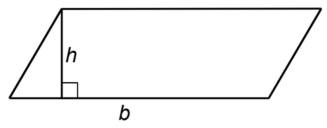
Triangel

$\text{area} = \dfrac{bh}{2}$



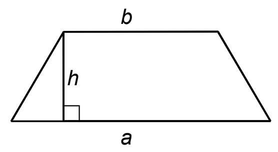
Parallellogram

$\text{area} = bh$



Parallelltrapets

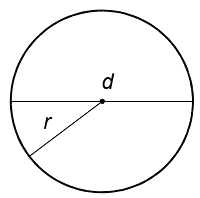
$\text{area} = \dfrac{h(a+b)}{2}$



Cirkel

$\text{area} = \pi r^2 = \dfrac{\pi d^2}{4}$

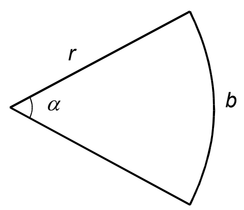
$\text{omkrets} = 2\pi r = \pi d$



Cirkelsektor

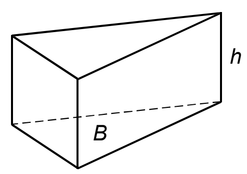
bågen $b = \dfrac{\alpha}{360} \cdot 2\pi r$

$\text{area} = \dfrac{\alpha}{360} \cdot \pi r^2 = \dfrac{br}{2}$



Prisma

$\text{volym} = Bh$

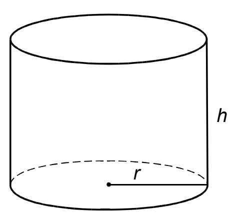


Cylinder

Rak cirkulär cylinder

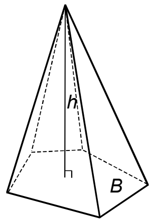
$\text{volym} = \pi r^2 h$

$\text{mantelarea} = 2\pi rh$



Pyramid

$$\text{volym} = \frac{Bh}{3}$$

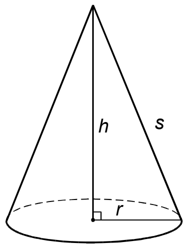


Kon

Rak cirkulär kon

$$\text{volym} = \frac{\pi r^2 h}{3}$$

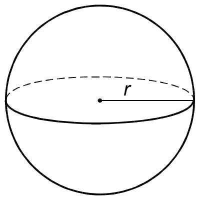
$$\text{mantelarea} = \pi r s$$



Klot

$$\text{volym} = \frac{4\pi r^3}{3}$$

$$\text{area} = 4\pi r^2$$

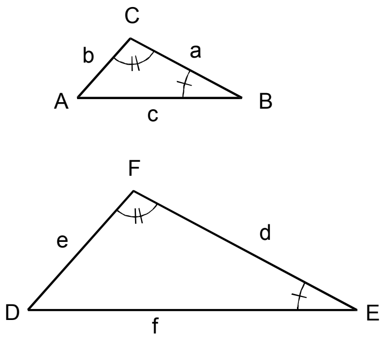


Likformighet

För likformiga geometriska figurer gäller att motsvarande vinklar är lika stora och att förhållandet mellan motsvarande sidor är lika.

Trianglarna ABC och DEF är likformiga.

Då gäller $\frac{b}{e} = \frac{c}{f}$

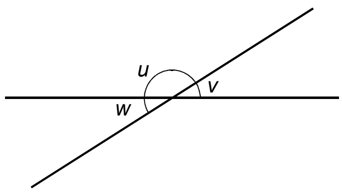


Skala

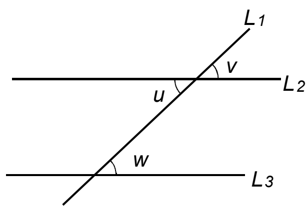
Areaskalan = (Längdskalan)^2 Volymskalan = (Längdskalan)^3

Vinklar

När två räta linjer skär varandra är sidovinklarnas summa 180º (t.ex. $u + v$ =180º) och vertikalvinklar lika stora (t.ex. $w = v$).



När en linje L_1 skär två andra inbördes parallella linjer L_2 och L_3 så är likbelägna vinklar lika stora (t.ex. v = w) och alternatvinklar lika stora (t.ex. $u = w$)



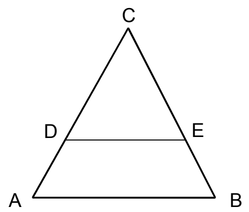
Omvänt gäller att om alternatvinklar eller likbelägna vinklar är lika stora så är linjerna L_2 och L_3 parallella.

Topptriangel- och transversalsatsen

Om DE är parallell med AB gäller

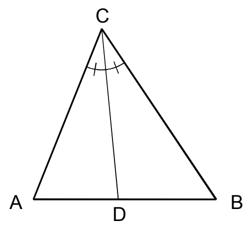
$$\frac{DE}{AB} = \frac{CD}{AC} = \frac{CE}{BC} \text{ och}$$

$$\frac{CD}{AD} = \frac{CE}{BE}$$



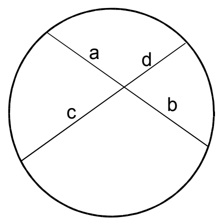
Bisektrissatsen

$$\frac{AD}{BD} = \frac{AC}{BC}$$



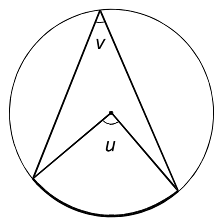
Kordasatsen

$ab = cd$



Randvinkelsatsen

Medelpunktsvinkeln till en cirkelbåge är dubbelt så stor som randvinkeln till samma cirkelbåge $(u = 2v)$



KOMPLEXA TAL

Representation

$z = x + \mathrm{i}y = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi} = r(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi)$ där x, y, r och φ är reella tal samt $\mathrm{i}^2 = -1$

Argument

$\arg z = \varphi \qquad \tan\varphi = \dfrac{y}{x}$

Absolutbeloppet

$|z| = r = \sqrt{x^2 + y^2}$

Konjugat

Talen $z = x + \mathrm{i}y$ och $\bar{z} = x - \mathrm{i}y$ kallas konjugerade tal

Räknelagar

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 \big(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + \mathrm{i}\sin(\varphi_1 + \varphi_2)\big) = r_1 r_2 \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\varphi_1 + \varphi_2)}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}\big(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + \mathrm{i}\sin(\varphi_1 - \varphi_2)\big) = \frac{r_1}{r_2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\varphi_1 - \varphi_2)}$$

de Moivres formel

$$z^n = \big(r(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi)\big)^n = r^n(\cos n\varphi + \mathrm{i}\sin n\varphi)$$

Eulers formler

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}y} = \cos y + \mathrm{i}\sin y$$

$$\cos y = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}y} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}y}}{2} \qquad \sin y = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}y} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}y}}{2\mathrm{i}}$$

NUMERISKA METODER

Ekvationslösning Newton-Raphsons iterationsformel: $x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}$

Integraler Intervallet $a_0 \le x \le a_n$ delas in i n delintervall.

Mittpunkten i varje delintervall betecknas $x_1, x_2, \ldots, x_n$

Rektangelmetoden: $\displaystyle\int_{a_0}^{a_n} f(x)\mathrm{d}x = \frac{a_n - a_0}{n}\left(f(x_1) + f(x_2) + \ldots + f(x_n)\right)$

Trapetsmetoden: $\displaystyle\int_{a_0}^{a_n} f(x)\mathrm{d}x = \frac{a_n - a_0}{2n}\left(f(a_0) + 2f(a_1) + 2f(a_2) + \ldots + 2f(a_{n-1}) + f(a_n)\right)$

Differential-ekvationer $y' = f(x, y)$, steglängd h

Eulers metod (tangentmetoden): $y_{n+1} = y_n + h \cdot f(x_n, y_n)$

Mittpunktsmetoden: $y_{n+1} = y_n + h \cdot f\left(x_n + \dfrac{h}{2},\ y_n + \dfrac{h}{2} \cdot k\right)$ där $k = f(x_n, y_n)$

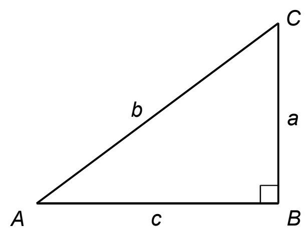
TRIGONOMETRI

Definitioner *ABC* är en rätvinklig triangel.

$\sin A = \dfrac{a}{b} \quad \left(\dfrac{\textit{motstående katet}}{\textit{hypotenusan}}\right)$

$\cos A = \dfrac{c}{b} \quad \left(\dfrac{\textit{närliggande katet}}{\textit{hypotenusan}}\right)$

$\tan A = \dfrac{a}{c} \quad \left(\dfrac{\textit{motstående katet}}{\textit{närliggande katet}}\right)$

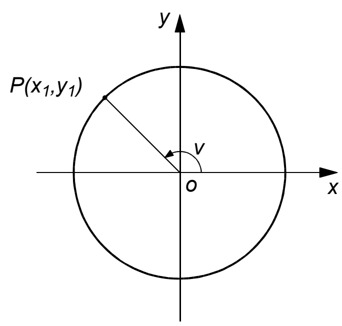


OP är radie i en enhetscirkel.
Koordinaterna för P är (x_1, y_1)

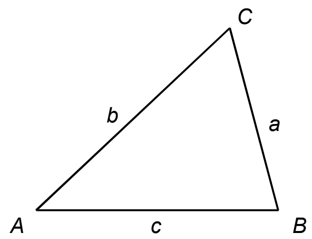
$\sin v = y_1$

$\cos v = x_1$

$\tan v = \dfrac{y_1}{x_1}$



Sinussatsen $\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$



Cosinussatsen $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$

Areasatsen $\text{arean} = \frac{ab\sin C}{2}$

Trigonometriska formler

$\sin^2 a + \cos^2 a = 1$

$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$

$\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$

$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$

$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$

$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta}$

$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$

$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = 1 - 2\sin^2\alpha$

$\sin^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos\alpha}{2}$ $\qquad$ $\cos^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1 + \cos\alpha}{2}$

$a\sin x + b\cos x = c\sin(x + v)$ där $c = \sqrt{a^2 + b^2}$ och $\tan v = \frac{b}{a}$

Exakta värden

Vinkel v (grader) (radianer)	$0°$ 0	$30°$ $\frac{\pi}{6}$	$45°$ $\frac{\pi}{4}$	$60°$ $\frac{\pi}{3}$	$90°$ $\frac{\pi}{2}$	$120°$ $\frac{2\pi}{3}$	$135°$ $\frac{3\pi}{4}$	$150°$ $\frac{5\pi}{6}$	$180°$ π
$\sin v$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\cos v$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
$\tan v$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	Ej def.	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0